

Apéndice B. Modificación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Las fuerzas provocadas por el gradiente aparente del índice de refracción deberían modificar las ecuaciones de Navier-Stokes. Veamos:

$$n(x, y, z) = \left(1 - \frac{u(x, y, z, t)^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla n = \nabla \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla n = -\frac{1}{2c^2} 2u \frac{\partial u}{\partial x} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2c^2} 2u \frac{\partial u}{\partial y} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2c^2} 2u \frac{\partial u}{\partial z} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow \nabla n = -\frac{1}{2c^2} 2u \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

y por tanto

$$\frac{\nabla n}{n} = -\frac{1}{2c^2} 2u \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Para el caso no relativista

$$\frac{\nabla n}{n} = -\frac{1}{2c^2} 2u \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{1}{c^2} u \nabla u \rightarrow \frac{dr^2}{dt^2} \frac{1}{c^2} = -\frac{1}{c^2} u \nabla u$$

$$a(x, y, z) = -u \nabla u$$

Esta relación es muy similar al término independiente del tiempo de la derivada material, pero no debe ser confundido con el. Matemáticamente se refiere al modulo de la velocidad, no al vector velocidad. Se trata de una **fuerza aparente debida al gradiente de velocidad del tiempo** y debería ser añadida a la ecuación de Navier Stokes, que por ejemplo en su forma convectiva quedaría:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} - \eta \nabla^2 \vec{u} = -\nabla \omega + \vec{g} + u \nabla u$$

Para comprobar la relación anterior se ha utilizado el programa de software Nast2d, del Institut für Numerische Simulation de la universidad de Bohn, ya que su descarga está disponible junto con el código fuente, y además está diseñado para la docencia, lo que permite una fácil modificación.

Aparte de algunos cambios en el archivo visual.c para modificar el formato de salida de los datos y así poder utilizar el programa de visualización Paraview la única modificación relevante se ha producido en el archivo uvp.c y han sido las siguientes:

- Se ha definido y calculado las derivadas parciales de las dos componentes de la velocidad, (u,v):

$$DUDX = (U[i+1][j]-U[i-1][j]) / delx / 2;$$

$$DV DX = (V[i+1][j]-V[i-1][j]) / delx / 2;$$

$$DUDY = (U[i][j+1]-U[i][j-1]) / dely / 2;$$

$$DVDY = (V[i][j+1]-V[i][j-1]) / dely / 2;$$

y se han modificado los factores F y G añadiendo los nuevos términos

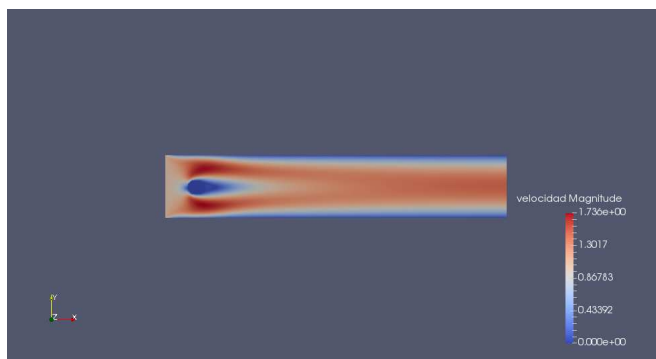
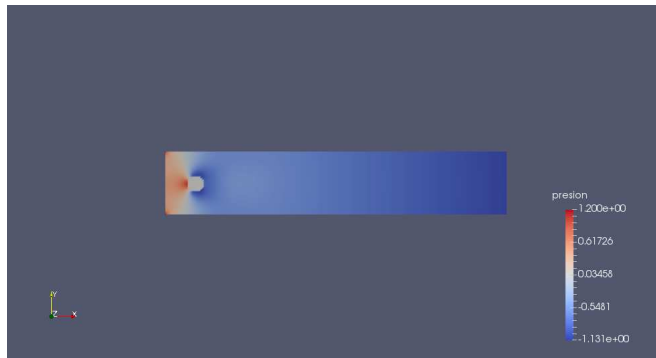
$$F[i][j] = U[i][j] + \text{delt} * (\text{LAPLU}/\text{Re} - U[i][j] * DUDX - V[i][j] * DV DX - DU^2 DX - DU VD Y + GX - \text{delt} * \text{beta} * GX * (\text{TEMP}[i][j] + \text{TEMP}[i+1][j]) / 2;$$

$$G[i][j] = V[i][j] + \text{delt} * (\text{LAPLV}/\text{Re} - U[i][j] * DUDY - V[i][j] * DVDY - DU VD X - DV^2 DY + GY - \text{delt} * \text{beta} * GY * (\text{TEMP}[i][j] + \text{TEMP}[i][j+1]) / 2;$$

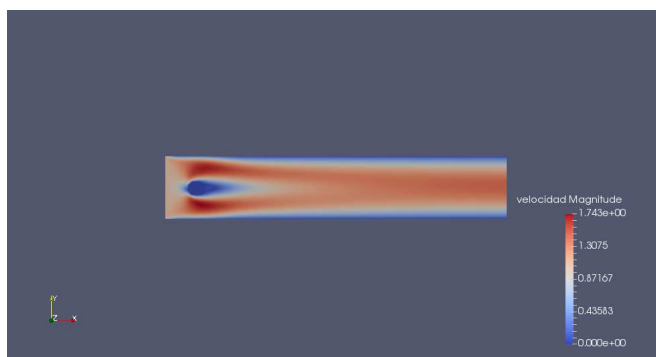
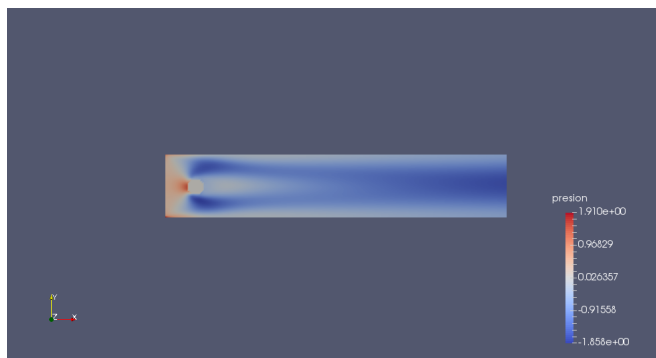
Se ha aplicado a algunos casos sencillos, por ejemplo un obstáculo con forma circular a diferentes números de Reynolds.

En las páginas siguientes se representan los resultados obtenidos con la formula tradicional y la ampliada a Reynolds 30 de un obstáculo circular, condición de contorno de las paredes Norte y Sur no-slip, condición de contorno IN / OUT en las paredes Este y Oeste y resolución de 220 x 40 celdas.

Navier Stokes



Navier Stokes modificadas



Obsérvese la relación inversa entre velocidad y presión, solución mucho más parecida a la que se desprende del estudio unidimensional de las líneas de corriente.

En general a régimen laminar funciona perfectamente ,de hecho incluso produce sin problemas

los torbellinos de Von Karman, pero en cuanto existe cierta turbulencia, los resultados difieren bastante de los experimentales.

Sin embargo, la presencia de turbulencia no implica que estas fuerzas desaparezcan, sino que impide que podamos estimar adecuadamente estas fuerzas, veamos porque.

La escala de Kolmogorov es aquella en la cual se disipa toda la energía y cuyo Reynolds asociado vale la unidad. La relación entre las longitudes características de la macroescala y la microescala es la siguiente $\frac{\lambda_0}{L} \cong \mathfrak{R}_L^{-3/4}$

La microescala nos va a indicar la resolución mínima que debemos alcanzar para poder resolver directamente las ecuaciones de Navier Stokes en cualquier problema. Como numéricamente esto es imposible lo habitual es desarrollar modelos que utilizan el valor medio de las variables, por ejemplo en las escalas de velocidades tendremos

$$\frac{u_0}{U} \cong \mathfrak{R}_L^{-1/4}$$

lo que supone que por ejemplo en régimen turbulento para un Reynolds de 10000 por ejemplo tendremos que

$$\frac{u_0}{U} \cong \mathfrak{R}_L^{-1/4} = 0.1$$

,por tanto la velocidad variará un 10% con respecto a su valor medio, lo cual todavía es aceptable. Sin embargo, los gradientes de velocidad serán muy elevados. En concreto la fuerzas debidas a los gradientes de velocidad del tiempo serán en el caso de régimen turbulento.

$$\frac{\frac{u_0^2}{\lambda_0}}{\frac{U^2}{L}} \cong (\mathfrak{R}_L^{-1/4})^2 \frac{1}{\mathfrak{R}_L^{-3/4}} = \mathfrak{R}_L^{1/4}$$

lo que supone que por ejemplo en régimen turbulento para un Reynolds de 10000 por ejemplo

tendremos que $\frac{\frac{u_0^2}{\lambda_0}}{\frac{U^2}{L}} \cong \mathfrak{R}_L^{1/4} = 10$, por tanto, estas fuerzas variaran un 1000% con respecto a su valor medio, lo que resulta inaceptable y explica que el modelo anterior sea inaplicable en regímenes turbulentos.