

Capítulo 7. Fuerza nuclear residual

7.1. Potencial nuclear residual entre dos nucleones

7.1.1. Potenciales electrofuertes del protón y el neutrón

El potencial electrofuerte de un protón puede ser expresado mediante:

$$\Psi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (Q_p)^2 \frac{1}{\pi} \left[27 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 e^{-2r/a_0} - 26 \left(\frac{1}{a_1} \right)^3 e^{-2r/a_1} - \left(\frac{1}{a_2} \right)^3 e^{-2r/a_2} \right]$$

Con $a_0=0.31522$ fm, $a_1=0.3275$ fm y $a_2=8.4099$ fm y Q_1 la carga electrofuerte equivalente del protón, que sería para la primera onda $(9 \cdot 1.855 + 18 \cdot 1.669)/27 = 1,73110^{-18}C$ y para la segunda onda $(10 \cdot 1.855 + 16 \cdot 1.669)/26 = 1,740510^{-18}C$ con una media de $1,735710^{-18}C$.

El potencial electrofuerte de un neutrón puede ser expresado mediante:

$$\Psi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (Q_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[25 \left(\frac{1}{b_0} \right)^3 e^{-2r/b_0} - 24 \left(\frac{1}{b_1} \right)^3 e^{-2r/b_1} - \left(\frac{1}{b_2} \right)^3 e^{-2r/b_2} \right]$$

Con $b_0=0.31492$ fm, $b_1=0.3269$ fm y $b_2=8.592$ fm y Q_n la carga electrofuerte equivalente del neutrón, que sería para la primera onda $(23 \cdot 1.855 + 2 \cdot 1.669)/25 = 1,8401210^{-18}C$ y para la segunda onda $(23 \cdot 1.855 + 1 \cdot 1.669)/24 = 1,847210^{-18}C$ con una media de $1,843710^{-18}C$.

Si expresamos los potenciales electrofuertes en MeV y usamos fm las expresiones serían:

$$\Psi(r)_p = 910^9 (1.735710^{-18}C)^2 \cdot \frac{10^{15}}{\pi 1.60910^{-19}10^6} \left[27 \left(\frac{1}{0,3161} \right)^3 e^{-2r/0,3161} - 26 \left(\frac{1}{0,3281} \right)^3 e^{-2r/0,3281} - \left(\frac{1}{8,624} \right)^3 e^{-2r/8,624} \right]$$

$$\Psi(r)_n = 910^9 (1,843710^{-18}C)^2 \cdot \frac{10^{15}}{\pi 1.60910^{-19}10^6} \left[25 \left(\frac{1}{0,3156} \right)^3 e^{-2r/0,3156} - 24 \left(\frac{1}{0,3275} \right)^3 e^{-2r/0,3275} - \left(\frac{1}{8,624} \right)^3 e^{-2r/8,624} \right]$$

que podemos representar.

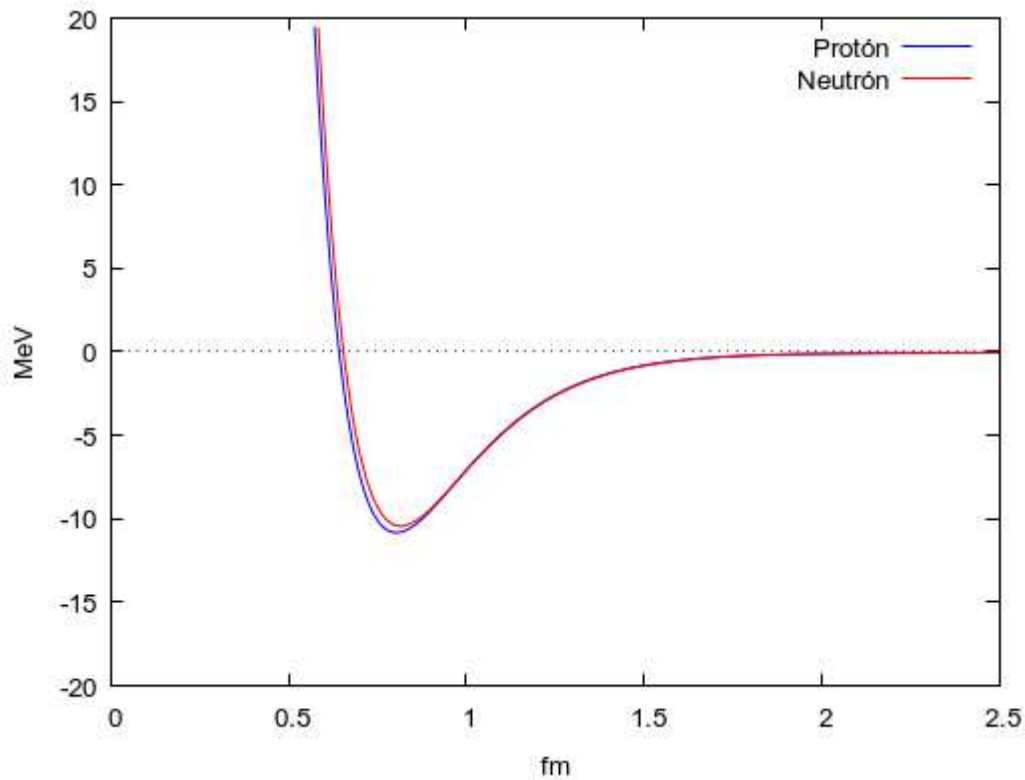


Figura 7.1. Potencial electrofuerte

Estos potenciales son acordes con las máximas energías de enlace observadas en la naturaleza, que presentan valores máximos de aproximadamente 8.8 MeV por nucleón.

7.1.2. Interacción nucleón-nucleón

Ahora bien, este potencial se ha descrito utilizando una imaginaria carga electrofuerte puntual, lo cual es perfectamente válido a escalas mayores, pero que no describe correctamente los fenómenos a la escala del fentometro. El potencial entre nucleones debe tener en cuenta la interacción en todos los puntos que forman parte del nucleón. Como ejemplo podemos representar el potencial electrofuerte de dos protones separados una distancia $a = 0,8$ fm.

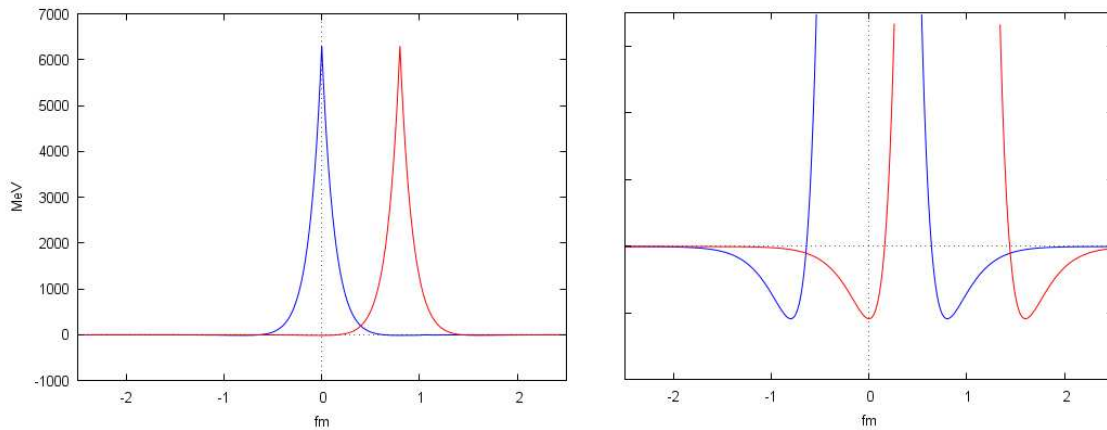


Figura 7.2. Dos protones $a=0,8$ fm

En el segundo gráfico se ha alterado la escala vertical para apreciar con más detalle la interacción. Una forma de estimar la interacción sería multiplicar los potenciales y posteriormente integrar este producto a lo largo de todo el volumen.

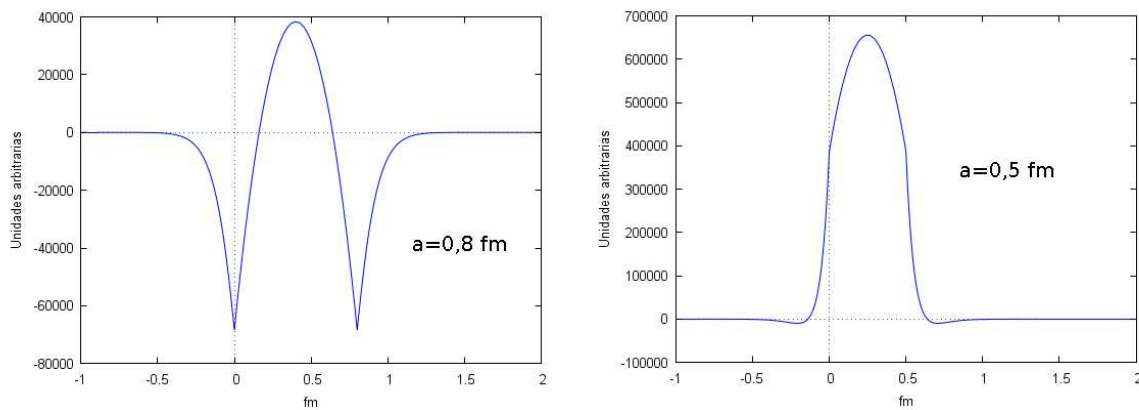


Figura 7.3. Producto de potenciales

Se ha integrado solo la parte dependiente de r , es decir:

$$F(r) = \iiint_V \left[27 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 e^{-2r/a_0} - 26 \left(\frac{1}{a_1} \right)^3 e^{-2r/a_1} - \left(\frac{1}{a_2} \right)^3 e^{-2r/a_2} \right] \cdot \left[25 \left(\frac{1}{b_0} \right)^3 e^{-2r/b_0} - 24 \left(\frac{1}{b_1} \right)^3 e^{-2r/b_1} - \left(\frac{1}{b_2} \right)^3 e^{-2r/b_2} \right] dV$$

Con $a_0=0.3161$ fm, $a_1=0.3281$ fm y $a_2=8.624$ fm y $b_0=0.3156$ fm, $b_1=0.3275$ fm y $b_2=8.624$ fm y luego se ha utilizado un factor de escala tal que $F(0) = \frac{\Psi_N(0) + \Psi_P(0)}{2}$.

La integral se ha realizado numéricamente en wxmáxima. Obsérvese la modificación para poder utilizar coordenadas cartesianas y el factor 1.1302.. para expresar las diferentes cargas electrofuertes. El parámetro a representa la distancia entre los dos nucleones (se ha escogido protón-neutrón para representar la interacción media) .

```
eIntegralx2PN_vol(a,dy,dz) := block([f:0, y,z],
  for z from -2.5 thru 2.5 step dz do
  {
    for y from -2.5 thru 2.5 step dy do
    {f:f+ quad_qags((-27*(2/(0.3161)^3*exp(-2*abs((x^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3161)))
      +26*(2/(0.3281)^3*exp(-2*abs((x^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3281)))
      +1*(2/(8.624)^3*exp(-2*abs((x^2+y^2+z^2)^0.5)/(8.624)))
    )*
      1.130246768089198* (-25*(2/(0.3156)^3*exp(-2*abs(((x-a)^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3156)))
      +24*(2/(0.3275)^3*exp(-2*abs(((x-a)^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3275)))
      +1*(2/(8.624)^3*exp(-2*abs(((x-a)^2+y^2+z^2)^0.5)/(8.624)))
    ), x, -6, 6)*dy
  }
},
f)
```

Se ha escogido como volumen a integrar un paralelepípedo de dimensiones 6 x 2,5 x 2,5 fm de lado con una resolución de $dx=dy=dz=0,1$ fm. Los resultados han sido:

```
[
[0,3616.846414069583],[0.1,3201.385507104461],[0.2,2350.877541025964],
[0.3,1498.189507029132],[0.4,840.7860804209859],[0.5,409.1044665787224],
[0.6,159.3732292538085],[0.7,32.20492157349359],[0.8,-22.29802713626394],
[0.85,-33.61727975453241],[0.9,-38.50838264279695],[0.925,-39.25660740928497],
[0.95,-39.17486278121196],[1,-37.2289795331129],[1.05,-33.81632116587219],
[1.1,-29.72411065240701],[1.2,-21.38184763665949],[1.3,-14.33673847264041],
[1.4,-9.111035322950277],[1.5,-5.540632287063081],[1.6,-3.247025355371193],
[1.7,-1.848965640344897],[1.8,-1.038327319634802],[1.9,-0.5926151789572619],
[2,-0.3626337997521036],[2.2,-0.2093248802561584],[2.5,-0.201668913732585]
]
```

Ya que $\Psi(0)_P = 6460.06$ y $\Psi(0)_N = 6939.41$ el factor de escala será

$$\frac{(6460,06 + 6939,41)/2}{3616,84} = 1,8524.$$

Ya podemos representar por tanto el potencial entre dos nucleones aislados.

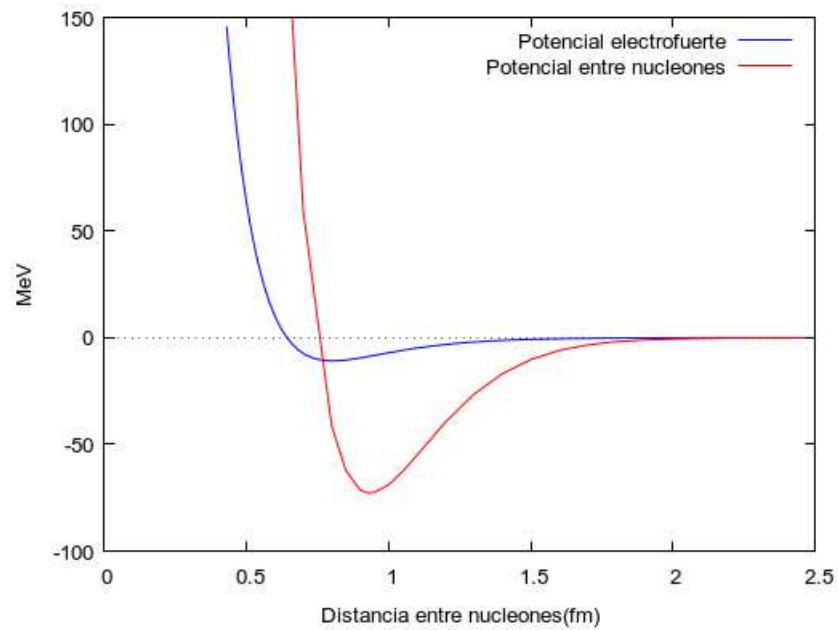


Figura 7.4. Potencial entre dos nucleones aislados

Nótese que la distancia de equilibrio se ha desplazado hacia la derecha y es aproximadamente igual a 1 fm (0.925 fm.). El potencial mínimo a esta separación es igual a -72.70 MeV.

O bien con menos detalle:

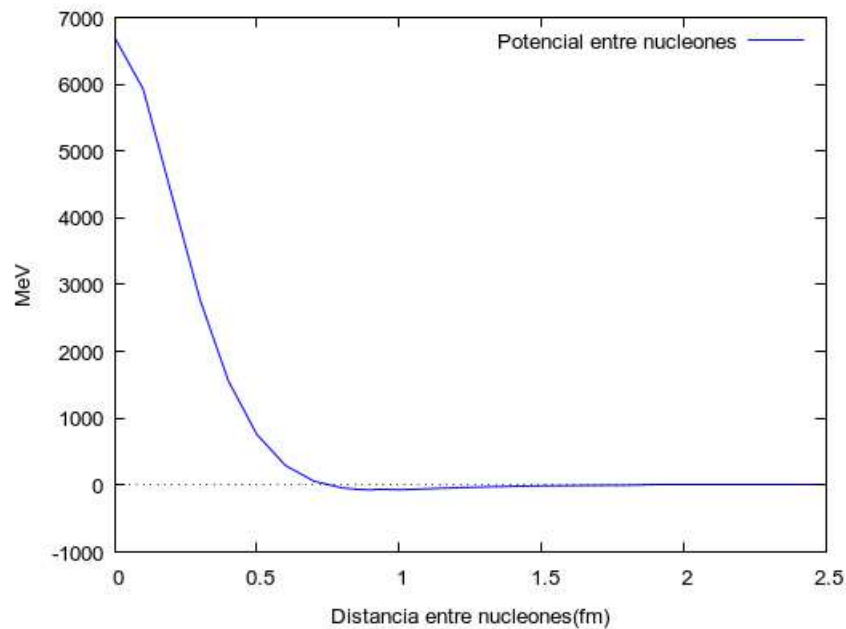


Figura 7.5. Potencial de interacción entre dos nucleones aislados

El potencial de interacción nuclear entre dos nucleones puede ser parametrizado mediante la suma de dos potenciales de Wood-Saxon.

$$\Psi_x(\text{MeV}) = \frac{7700}{1 + e^{\frac{x-0.25}{0.124}}} - \frac{176}{1 + e^{\frac{x-1}{0.18}}}$$

que podemos representar

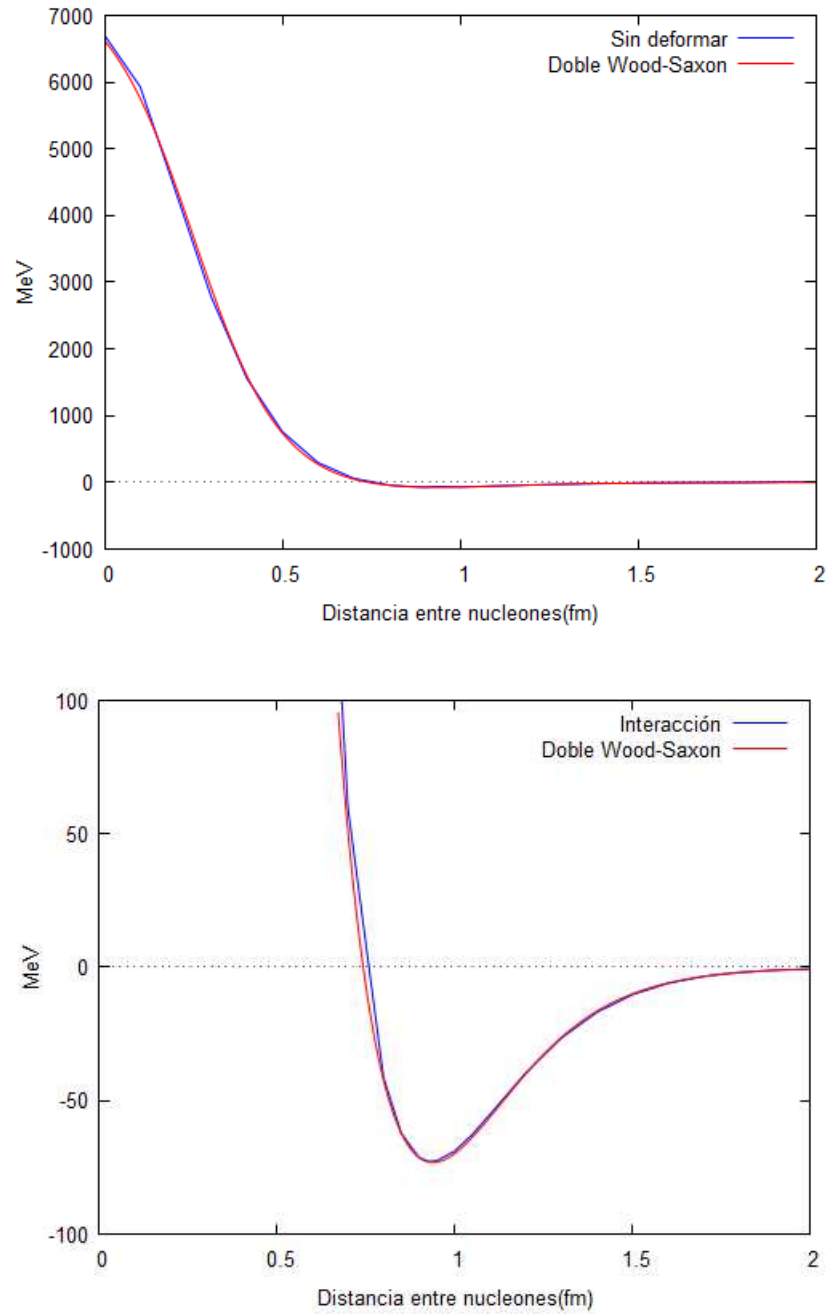


Figura 7.6. Potencial entre dos protones

7.2. Sistemas de dos nucleones

7.2.1. Modelización del sistema de dos nucleones

Vamos a resolverlo como un problema unidimensional en las dimensiones extendidas. Si utilizamos un sistema de coordenadas elíptico para las dimensiones compactadas y considerando la parametrización del potencial obtenido anteriormente $V(x)$ la ecuación de onda sería:

$$(\nabla_{6D}^2 + k^2) \cdot H = 0 \text{ donde } k = \frac{E_{\text{onda}}}{\hbar c} i$$

La energía total de la pulsación tendrá los siguientes términos:

- Energía de la pulsación en reposo: $E_0 = mc^2$
- Energía cinética: E_c

Como la energía cinética no es conocida a priori y el nucleón se va a mover en un campo potencial podemos expresarla como la diferencia entre:

- Energía mecánica: E_m
- Energía potencial. (MeV y fm)

Por tanto tendremos que:

$$k = \frac{E_{\text{onda}}}{\hbar c} i = \frac{mc^2 + E_m - V_x}{\hbar c} i$$

podemos escribir:

$$\nabla_{6D}^2 H - \left(\frac{mc^2 + (E_m - V_x)}{\hbar c} \right)^2 H = 0$$

Desarrollando tenemos:

$$\nabla^2 H - \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{(E_m - V_x)^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2mc^2(E_m - V_x)}{\hbar^2 c^2} \right) H = 0$$

y por tanto:

$$\nabla^2 H - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 H - \left(\frac{E_m - V_x}{\hbar c} \right)^2 H + \frac{2mc^2(E_m - V_x)}{\hbar^2 c^2} H = 0$$

para caso no relativista

$$\frac{2mc^2(E_m - V_x)}{\hbar^2 c^2} \gg \left(\frac{E_m - V_x}{\hbar c} \right)^2$$

quedando entonces:

$$\nabla^2 H - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 H + \frac{2mc^2(E_m - V_x)}{\hbar^2 c^2} H = 0$$

Se puede solucionar mediante separación de variables

$$H(\xi, \eta, x, y, z) = \Phi(\xi, \eta) \cdot \Psi(r)$$

que permite separar los laplacianos.

$$\nabla_{\xi, \eta}^2 \Phi - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi = 0 \text{ De solución análoga a la de la partícula libre. (I)}$$

$$\nabla^2 \Psi_r + \frac{2m(E_m - V_x)}{\hbar^2} \Psi = 0 \text{ (II)}$$

Que es la ecuación a resolver.

Dada la complejidad del potencial es obligatorio solucionarlo numéricamente. Con el fin de no lidiar con potencias de $\hbar$ se utilizará un sistema de unidades similar al atómico, que llamaremos sistema de unidades nucleares y que definiremos de esta forma

- Constante de planck reducida $\hbar = 1$
- Unidad de longitud nuclear u.l.n = 1 fm
- Unidad de masa nuclear u.m.n = masa deuterón = $3,343 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Unidad de energía nuclear u.e.n = $\frac{\hbar^2}{u.m.n \cdot u.l.n^2} = \frac{(1,0510^{-34})^2}{3,343 \cdot 10^{-27} \cdot (10^{-15})^2} = 3,327 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

lo que implica que $1 \text{ MeV} = 0,048229 \text{ u.e.n}$

No hace falta definir más unidades para que la ecuación de onda pueda escribirse de la misma forma simplificada que en las unidades atómicas.

$$\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_r + (E_m - V_x) \cdot \Psi = 0$$

7.2.2. Deuterón

Podemos entonces utilizar cualquier software de los que están programados para aceptar unidades atómicas. Yo he elegido `ejs_qm_SchroedingerNumerovEigensystem.jar` por ser de código libre y fácilmente modificable. Es muy importante destacar que dado la enorme diferencia entre la energía de enlace que liga los partones entre sí y la energía de enlace de los nucleones, estos no pierden su forma con simetría esférica, sino que podemos asimilarlo a dos partículas esféricas vibrando, resultando en este caso la interpretación del cuadrado de la función de onda como la probabilidad de encontrar los nucleones a esa distancia determinada. Si se introduce el potencial (uen y fm) obtenido anteriormente.

$$V(x) = 0,048229 \cdot \left[\frac{7700}{1 + e^{\frac{x-0.25}{0.124}}} - \frac{176}{1 + e^{\frac{x-1}{0.18}}} \right]$$

el programa utiliza el método de Numerov para conseguir una energía de enlace igual a -0.202 uen -> -4.18 MeV y un centro de gravedad del cuadrado de la función de onda situado a 1,74 fm, lo que no coincide con los datos experimentales.

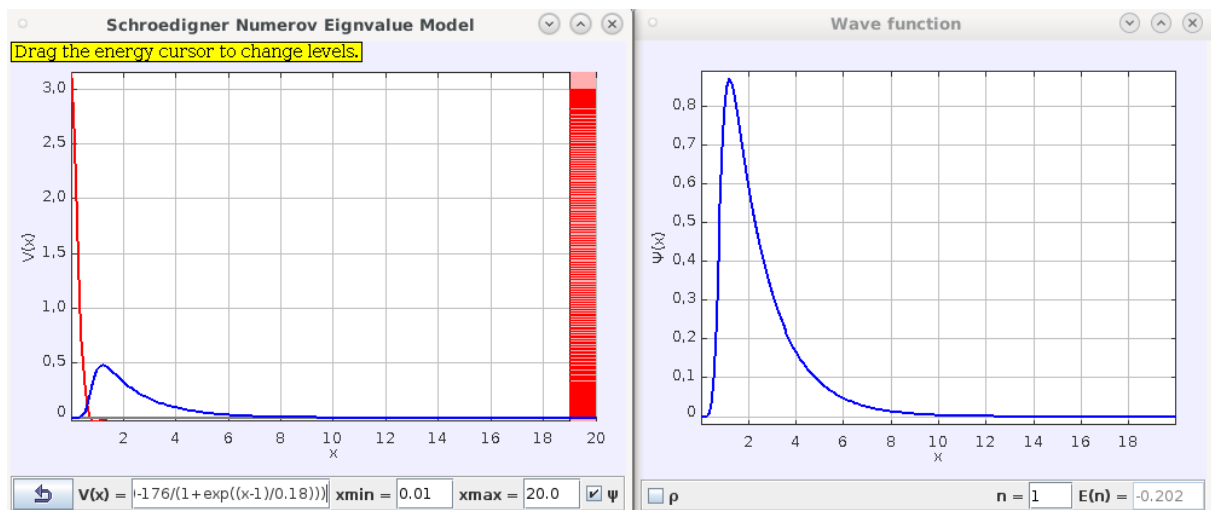


Figura 7.7. Deuterón Fuerza Nuclear Residual

Debemos por tanto introducir en el cálculo la interacción electromagnética. El potencial eléctrico será para el protón: (MeV y fm):

$$\Psi(r) = 910^9 (1.60910^{-19} C)^2 \cdot \frac{1}{\pi 1.60910^{-19} 10^6} \left[-9 \left(\frac{1}{0,3161} \right)^3 e^{-2r/0,3161} + 10 \left(\frac{1}{0,3281} \right)^3 e^{-2r/0,3281} \right]$$

y para el neutrón

$$\Psi(r) = 910^9 (1.609 \cdot 10^{-19} C)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \frac{10^{15}}{1.609 \cdot 10^{-19} 10^6} \left[-23 \left(\frac{1}{0.3156} \right)^3 e^{-2r/0.3156} + 23 \left(\frac{1}{0.3275} \right)^3 e^{-2r/0.3275} \right]$$

Resultando que la media de ambas es para $r=0$ de $\Psi(0) = -36.6067 \text{ MeV}$

La función a integrar será en este caso

$$F(r) = \iiint_V \left[-9 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 e^{-2r/a_0} + 10 \left(\frac{1}{a_1} \right)^3 e^{-2r/a_1} \right] \cdot \left[-23 \left(\frac{1}{b_0} \right)^3 e^{-2r/b_0} + 23 \left(\frac{1}{b_1} \right)^3 e^{-2r/b_1} \right] dV$$

Con $a_0=0.3161 \text{ fm}$, $a_1=0.3281 \text{ fm}$, $b_0=0.3156 \text{ fm}$ y $b_1=0.3275 \text{ fm}$ y luego se ha utilizado un factor de escala tal que $F(0) = \Psi(0) = -36.6067$.

La integral se ha realizado numéricamente en wxmáxima. Obsérvese la modificación para poder utilizar coordenadas cartesianas, el parámetro a representa la distancia entre los dos protones.

`eIntegralx2PN_vol(a,dy,dz) := block([f:0, y,z],`

`for z from -2.5 thru 2.5 step dz do`

`{`

`for y from -2.5 thru 2.5 step dy do`

`{f:f+ quad_qags((-9*(2/(0.3161)^3*exp(-2*abs((x^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3161)))`
`+10*(2/(0.3281)^3*exp(-2*abs((x^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3281)))`

`)*`

`(-23*(2/(0.3156)^3*exp(-2*abs(((x-a)^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3156)))`
`+23*(2/(0.3275)^3*exp(-2*abs(((x-a)^2+y^2+z^2)^0.5)/(0.3275)))`

`), x, -6, 6)*dy`

`}`

`},`

`f)`

Los resultados han sido:

[
 [0,-174.9747260243097],[0.1,-174.8363710457192],[0.2,-163.0327980705586],
 [0.3,-136.4840708887664],[0.4,-102.0756270509868],[0.5,-68.03438802331638],
 [0.6,-39.69760527531918],[0.7,-19.00347759294758],[0.8,-5.558521498761266],
 [0.9,2.130308952794548],[1,5.788179393252425],[1.1,6.918832749268625],
 [1.2,6.647005304401177],[1.3,5.724633895291221],[1.4,4.605299360642598],
 [1.5,3.532038881989236],[1.6,2.613338742099531],[1.7,1.879616680451443],
 [2,0.6176153728853977],[2.2,0.2748831982747318],[2.5,0.07461928146764144]
]

El factor de escala será por tanto $-36.6067 / -174.9747 = 0.2092113874216063$

Que podemos representar:

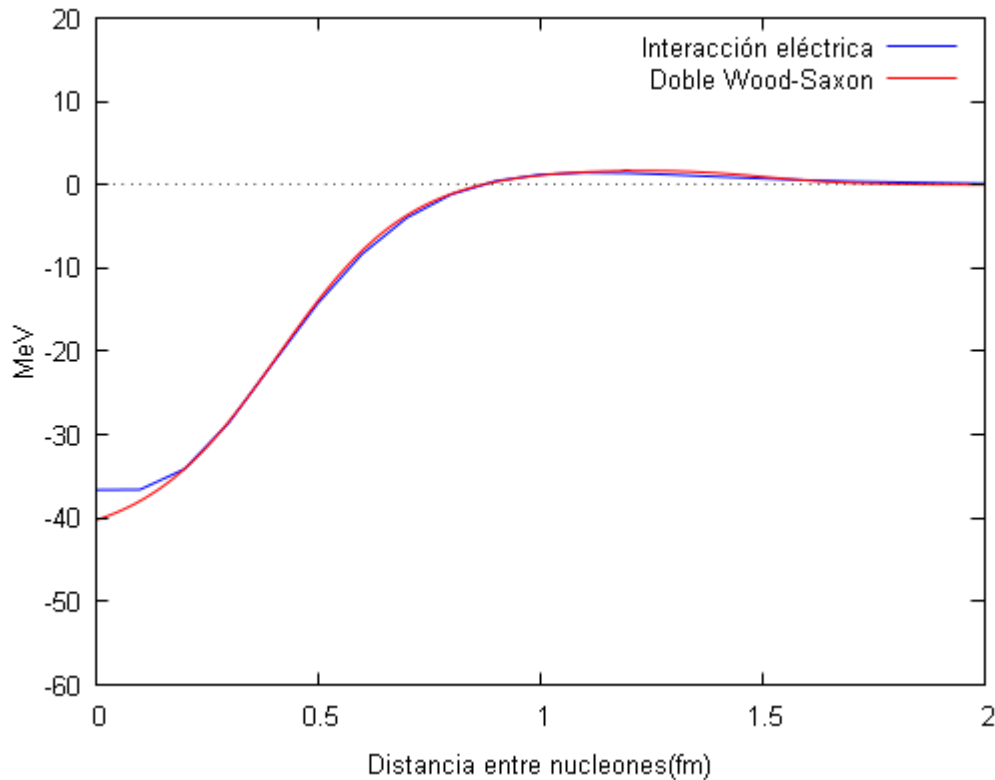


Figura 7.8. Interacción eléctrica protón-neutrón

Que se puede aproximar mediante un doble Wood-Saxon.

$$V(x) = -\frac{45}{1 + e^{\frac{x-0.41}{0.15}}} + \frac{2}{1 + e^{\frac{x-1.5}{0.1}}}$$

Podemos ya introducir en el programa la suma de los potenciales de esta forma

$$V(x) = 0,048229 \cdot \left[\frac{7700}{1 + e^{\frac{x-0.25}{0.124}}} - \frac{176}{1 + e^{\frac{x-1}{0.18}}} - \frac{45}{1 + e^{\frac{x-0.41}{0.15}}} + \frac{2}{1 + e^{\frac{x-1.5}{0.1}}} \right]$$

El programa calcula entonces una energía de enlace de -0.176 uen= - 3.65 MeV y un centro de gravedad del cuadrado de la función de onda en 1,79 fm, cifras que se aproximan mejor a las experimentales.

Ahora bien, como la energía obtenida no se corresponde con la experimental, se postula que los nucleones que forman el deuterón no presentan una vibración pura, sino que también giran entre sí. (El modelo estándar diría que un porcentaje se encuentra en estado d). Esto obliga a modificar el potencial nuclear añadiendo un término centrífugo de la forma:

$$\frac{K}{r^2}$$

Por simple tanteo se encuentra que el potencial

$$V(x) = 0,048229 \cdot \left[\frac{7700}{1 + e^{\frac{x-0,25}{0,124}}} - \frac{176}{1 + e^{\frac{x-1}{0,18}}} - \frac{45}{1 + e^{\frac{x-0,41}{0,15}}} + \frac{2}{1 + e^{\frac{x-1,5}{0,1}}} + \frac{2,9}{x^2} \right]$$

proporciona la energía correcta, es decir, 0.108 uen o 2,23 MeV y un centro de gravedad del cuadrado de la función de onda de 1,977 fm, muy próximo a las medidas experimentales de 1,97 fm.

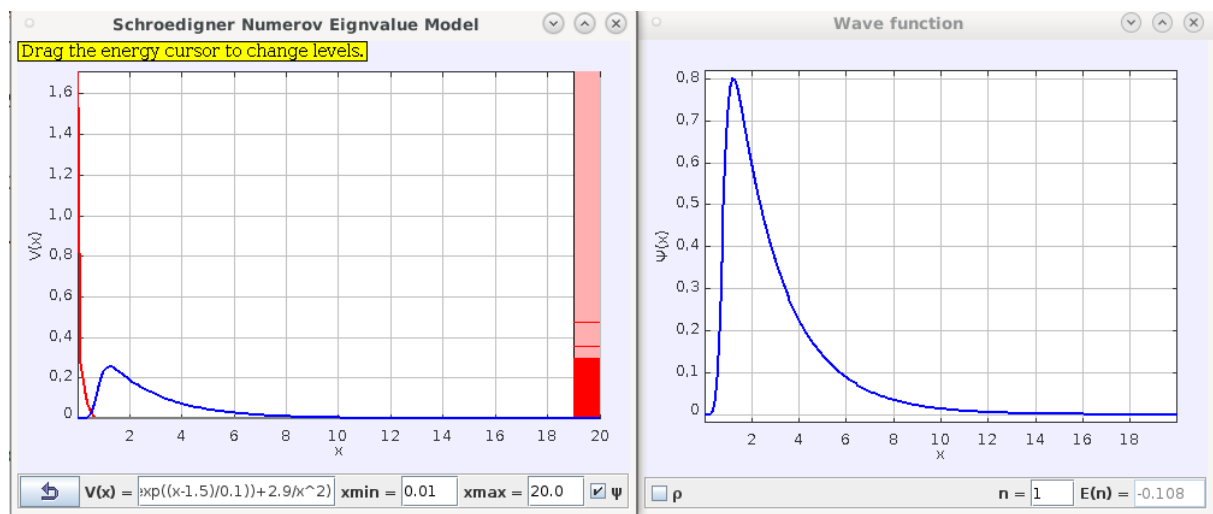


Figura 7.9. Función de onda del deuterón

Comparémoslo con los resultados experimentales, el término centrífugo para un orbital d puro ($l=2$) expresado en MeV y fm sería:

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} = \frac{(1.03410^{-34})^2}{21.6710^{-27}} \cdot \frac{(10^{15})^2}{1,60910^{-19} 106} \cdot \frac{2(2+1)}{x^2} = \frac{119.3685}{x^2}$$

Luego el %d estimado sería $2,9/119,3685 = 2,47\%$, compatible con la medida experimental de 2,56% tomada de [8].

Podemos por tanto considerar que la función de onda obtenida con el potencial anterior se corresponde con la del deuterón.

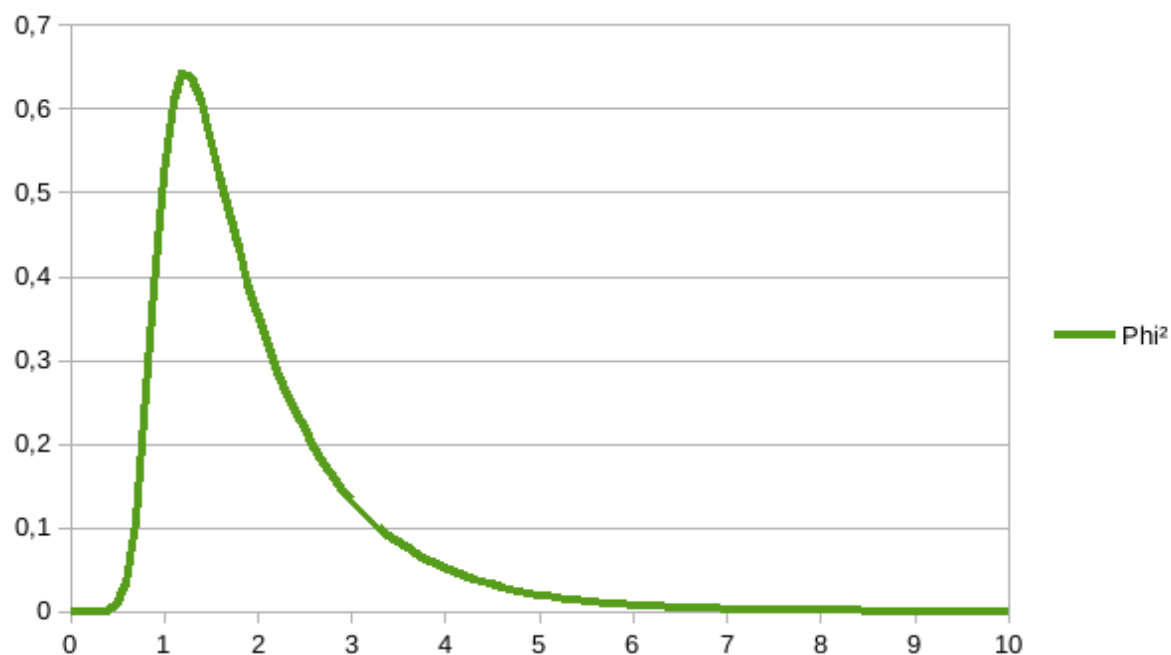


Figura 7.10. Función de onda estimada del deuterón

r (fm)	Ψ^*	r (fm)	Ψ^*	r (fm)	Ψ^*	r (fm)	Ψ^*	r (fm)	Ψ^*
0	5,24E-30	2	0,3557	4	0,0511	6	0,0077	8	0,0012
0,1	5,16E-09	2,1	0,3222	4,1	0,0464	6,1	0,0070	8,1	0,0011
0,2	5,53E-07	2,2	0,2918	4,2	0,0422	6,2	0,0064	8,2	0,0010
0,3	0,00003	2,3	0,2644	4,3	0,0384	6,3	0,0058	8,3	0,0009
0,4	0,0006	2,4	0,2396	4,4	0,0349	6,4	0,0053	8,4	0,0008
0,5	0,0061	2,5	0,2171	4,5	0,0318	6,5	0,0048	8,5	0,0007
0,6	0,0327	2,6	0,1969	4,6	0,0289	6,6	0,0044	8,6	0,0007
0,7	0,1055	2,7	0,1785	4,7	0,0263	6,7	0,0040	8,7	0,0006
0,8	0,2322	2,8	0,1620	4,8	0,0239	6,8	0,0036	8,8	0,0006
0,9	0,3851	2,9	0,1470	4,9	0,0218	6,9	0,0033	8,9	0,0005
1	0,5202	3	0,1334	5	0,0198	7	0,0030	9	0,0005
1,1	0,6074	3,1	0,1211	5,1	0,0180	7,1	0,0027	9,1	0,0004
1,2	0,6423	3,2	0,1099	5,2	0,0164	7,2	0,0025	9,2	0,0004
1,3	0,6371	3,3	0,0998	5,3	0,0149	7,3	0,0023	9,3	0,0004
1,4	0,6077	3,4	0,0907	5,4	0,0136	7,4	0,0021	9,4	0,0003
1,5	0,5665	3,5	0,0824	5,5	0,0123	7,5	0,0019	9,5	0,0003
1,6	0,5211	3,6	0,0749	5,6	0,0112	7,6	0,0017	9,6	0,0003
1,7	0,4758	3,7	0,0680	5,7	0,0102	7,7	0,0016	9,7	0,0002
1,8	0,4326	3,8	0,0618	5,8	0,0093	7,8	0,0014	9,8	0,0002
1,9	0,3925	3,9	0,0562	5,9	0,0085	7,9	0,0013	9,9	0,0002

Figura 7.11. Resultados numéricos